BAB II MATERI PENUNJANG

2.1. DETERMINAN

Definisi 2.1.1

Matriks merupakan kumpulan bilangan- bilangan yang disusun secaraempat persegi panjang dan diatur dalam baris dan kolom.

Pemberian nama pada matriks ditulis dengan huruf besar. Skalar-skalar pada matriks $A = (a_{ij})$ disebut elemen-elemen matriks, ditulis a_{ij} yaitu elemen matriks A baris ke- i kolom ke-j. Ukuran matriks yang disebut sebagai ordo matriks menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom.

Definisi 2.1.2

Matriks bujur sangkar berordo (nxn) disebut matriks identitas I(nxn), jika semua elemennya nol kecuali elemen-elemen pada baris ke-i kolom ke-i(i=1,2,..n) adalah 1.

Definisi 2.1.3

Inversi dari suatu permutasi adalah terdapatnya bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil, atau $j_i > j_k$ untuk $i < k$.

Definisi 2.1.4

Jika jumlah inversi dari suatu permutasi adalah genap, maka disebut permutasi genap dan bila jumlah inversinya ganjil maka disebuat permutasi ganjil.

Contoh 2.1.1

Pada permutasi (2,3,4,5,1) terdapat 4 inversi, yaitu : 2 mendahului 1, 3 mendahului 1, 4 mendahului 1 dan 5 mendahului 1. Karena jumlah inversnya genap, maka permutasi (2,3,4,5,1) disebut permutasi genap.

Definisi 2.1.5

Determinan dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah jumlah dari semua $n! = n.(n-1)\ (n-2)\ \ldots 2.1$ hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks tersebut dengan kata lain

$$\det A = |A| = \Sigma\sigma\,(j_1, j_2, ..j_n)\ a_1j_1.a_2j_2.\ldots.a_nj_n$$

dengan :

$j_1, j_2, \ldots, j_n$ = permutasi

$\sigma\,(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ = + ; bila permutasi genap

= − ; bila permutasi ganjil

$a_1j_1.a_2j_2.\ldots.a_nj_n$ = perkalian elemen-elemen matriks

Contoh : 2.1.2

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

terdapat $3! = 3.2.1 = 6$ permutasi

Permutasi	Banyak inversi	Permutasi	Banyak inversi
1, 2, 3	0	3, 2, 1	3
2, 3, 1	2	1, 3, 2	1
3, 1, 2	2	2, 1, 3	1

$$\begin{aligned} \text{Determinan } A = |A| &= \Sigma\sigma\,(j_1.j_2.j_3).a_1j_1.a_2j_2.a_3j_3 \\ &= (1.2.0)+(0.0.3)+(3.2.1)-(3.2.3) \\ &\quad -(1.0.1)-(0.2.0) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Sifat-sifat determinan

1. Det A = det A^T ; A^T adalah matriks transpose dari A
2. Tanda determinan berubah jika 2 baris/kolom ditukar tempatnya.
3. Matriks yang mempunyai baris / kolom nol mempunyai determinan nol.

2.2. KOFAKTOR

Definisi 2.2.1

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar berordo (nxn)

Minor dari elemen a_{ij} ditulis $|M_{ij}|$, M_{ij} adalah sub matriks dari A yang berordo (n-1)x(n-1) yang diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen baris ke-i dan elemen-elemen kolom ke-j pada matriks A.

Contoh 2.2.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Minor dari elemen $a_{13} = |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= (2.1)-(2.3)$

$= -4$

Definisi 2.2.2

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar berordo (nxn)

Kofaktor dari elemen a_{ij} ditulis sebagai Δ_{ij},

dimana $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\ |M_{ij}|$

Contoh 2.2.2

Kofaktor dari elemen a_{13} dari matriks pada contoh 2.2.1 di atas adalah : $\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\ |M_{13}|$

$= (-1)^4 \ .\ -4$

$= -4$

Teorema 2.2.1

Determinan suatu matriks A dapat diperoleh dengan menjumlahkan perkalian elemen-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Dapat ditulis sebagai :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ . \ \Delta_{ij} = a_{i1}.\Delta_{i1} + a_{i2}.\Delta_{i2} + \ldots + a_{in}.\Delta_{in}$$

merupakan ekspansi baris ke-i dengan i sebarang.

Dapat pula ditulis sebagai :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ . \ \Delta_{ij} = a_{1j}.\Delta_{1j} + a_{2j}.\Delta_{2j} + \ldots + a_{nj}.\Delta_{nj}$$

merupakan eksponen kolom ke-j dengan j sebarang.

Bukti :

Misalkan $|A| = a_{i1}.\Delta_{i1}^{*} + a_{i2}.\Delta_{i2}^{*} + \ldots + a_{in}.\Delta_{in}^{*}$, dimana Δ_{ij}^{*} adalah jumlah hasil kali elemen-elemen, tidak termasuk elemen pada baris ke-i.

Tinggal dibuktikan bahwa $\Delta_{ij}^{*} = \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, dimana M_{ij} adalah submatrik dari A dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari A.

Maka :

$$a_{nn}.\Delta_{nn}^{*} = a_{nn} \ \Sigma \ \sigma \ (j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}) \ a_1 j_1 . a_2 j_2 \ldots a_n j_{n-1}$$

$$= a_{nn} \ |M_{nn}|$$

Jadi $\Delta_{nn}^{*} = |M_{nn}| = (-1)^{n+n} |M_{nn}|$, sekarang pandang baris ke-i dan kolom ke-j sebarang. Kita tukarkan berturut-turut baris ke-i sampai pada baris ke-n, meka ada (n-1) kali pertukaran.

Juga kita pertukarkan berturut-turut kolom ke-j sampai pada kolom ke-n, maka ada (n-j) kali pertukaran.

Sehingga dari sifat-sifat determinan, tanda Δ_{ij}^{*} akan bertukar (n-1)+(n-j) kali, sedangkan harga $|M_{ij}|$ tetap.

$$\text{Jadi} \quad \Delta_{ij}^{*} = (-1)^{2n-i-j} |M_{ij}|$$

$$= (-1)^{-(i+j)} |M_{ij}|$$

$$= (-1)^{(i+j)} |M_{ij}|$$

$$= \Delta_{ij}$$

$$\text{Jadi} \quad |A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \ldots + a_{in}\Delta_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta_{ij} \text{ (terbukti)}$$

(Bukti untuk ekspansi kolom analog)

Contoh 2.2.3

Hitung determinan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan ekspansi baris ke-2

$$|A| = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + \ldots + a_{2n}\Delta_{2n}$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\ |M_{21}| = -1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\ |M_{22}| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\ |M_{23}| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Sehingga $|A| = 2.3 + 2\ (-9) + 0\ (-1)$

$= 6 - 18$

$= -12$

2.3. SISTEM PERSAMAAN LINIER

Pandang sistem persamaan linier dengan m-persamaan dan n-variabel :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

a_{ij} dimana $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ adalah koefisien-koefisien dari sistem persamaan linier.

b_i adalah konstanta sistem persamaan linier.

Sistem persamaan linier dimana $b_i = 0$ disebut sistem persamaan linier homogen. Sedang apabila $b_i \neq 0$ disebut sistem persamaan linier non homogen.

Sistem persamaan linier di atas jika disajikan dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai : AX = B, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ merupakan matriks koefisien dari sistem persamaan di atas

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ vektor kolom yang merupakan variabel-variabel dari sistem persamaan di atas

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ vektor kolom yang merupakan konstanta dari sistem persamaan di atas

Suatu sistem persamaan linier non homogen AX = B disebut sebagai sistem persamaan linier non homogen ordo n, apabila matriks A berordo (nxn). Jadi jumlah variabel sama dengan jumlah persamaan liniernya.

Solusi dari sistem persamaan linier non homogen AX = B ordo n dengan aturan Cramer berbentuk :

$$x_k = \frac{D_k}{|A|}, \quad |A| \neq 0 \quad \text{dimana,}$$

x_k = solusi sistem persamaan linier non homogen ordo n (k = 1,2,...,n)

$|A|$ = Determinan matriks A

D_k = Determinan matriks koefisien A dengan mengganti kolom ke-k dengan vektor kolom B

Teorema 2.3.1.

Suatu persamaan linier non homogen ordo n, AX = B akan mempunyai

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{ij} \ , \ (i, \ j = 1,2, \ \ldots \ , \ n)$$

dimana : b_i = kontanta persamaan ke - i

Δ_{ij} = kofaktor elemen baris ke-i kolom ke-j dari matriks A

Bukti :

$$D_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Menurut teorema 2.2.1 , determinan suatu matriks merupakan jumlah perkalian elem-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Matriks di atas kita ekspansikan menurut kolom ke-j, karena kolom ke-j telah diganti dengan vektor kolom B, maka :

$$D_j = b_1 \Delta_{1j} + a_2 \Delta_{2j} + a_3 \Delta_{3j} + \ldots + b_n . \Delta_{nj} ,$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{ij}$$

Dengan demikian aturan Cramer dapat dinyatakan :

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{ij}}{|A|} \qquad (i,j = 1,2, \ldots , n)$$

dengan :

x_j = solusi sistem persamaan linier non homogen ordo n (j = 1,2, ... , n)

b_i = elemen ke - i vektor kolom B , (i = 1,2, ... , n)

Δ_{ij} = kofaktor elemen baris ke-i kolom ke-j dari matriks A

$|A|$ = Determinan matriks koefisien A.

2.4. GRAPH BERARAH

Definisi 2.4.1

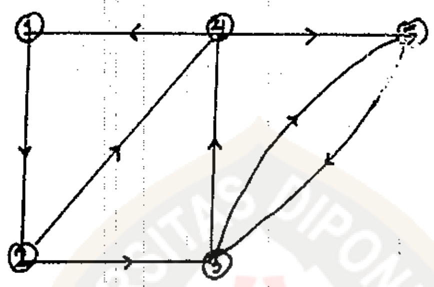
Suatu graph berarah (DIRECTED GRAPH/DIGRAPH) dinotasikan $G_d(V,E)$ dimana V adalah himpunan node-node dan E adalah himpunan edge-edge berarah dalam bentuk pasangan (i,j) dengan i dan j elemen V. (i,j) disebut edge berarah dari i ke j dalam G_d, dengan node i sebagai initial node dan node j sebagai terminal node.

Contoh : 2.4.1

Suatu graph berarah G_d (V,E) dengan

V = {1,2,3,4,5} dan E = {(1,2), (2,3), (2,4), (4,1),

(4,5), (3,4), (3,5), (5,3)}



Gb 2.4.1 digraph G_d (V,E)

Definisi 2.4.2

Directed edge-Sequence (Barisan edge berarah) dengan panjang k-1 dalam digraph G_d adalah suatu barisan edge dengan bentuk : (i_1,i_2), (i_2,i_3), (i_3,i_4),...(i_{k-1},i_k), $k \geq 2$. Node dan edge berarah dalam barisan edge berarah boleh berulang.

Contoh : 2.4.2

Pada gambar 2.4.1 barisan : (1,2), (2,3), (3,5),

(5,3), (3,4), (4,1)

adalah barisan edge berarah dengan panjang 6.

Definisi 2.4.3

Directed Path (Path berarah) dari suatu digraph G_d adalah suata barisan edge berarah dengan edge berarahnya tidak boleh berulang dan node awal tidak sama dengan node akhir atau $i_1 \neq i_k$ dan semua node-nodenya berlainan.

Contoh 2.4.3

(1,2), (2,3), (3,5) adalah directed path dengan panjang 3 dalam digraph G_d pada gambar 2.4.1.

Definisi 2.4.4

Directed Circuit (sirkuit berarah) dari suatu digraph G_d adalah suatu directed-path dengan node awal sama dengan node akhir ($i_1 = i_k$), dan node-node yang lain tidak boleh sama. Sirkuit berarah yang panjangnya satu disebut self-loop.

Contoh 2.4.4

(1,2), (2,3), (3,4), (4,1) adalah sirkuit terarah dari digraph G_d pada gambar 2.4.1.

Definisi 2.4.5

Derajat masuk (Indegree)yaitu banyaknya edge yang mempunyai node i sebagai terminal node dinotasikan $d^-(i)$. Derajat keluar (outdegree) yaitu banyaknya edge yang mempunyai node i sebagai initial node, dinotasikan $d^+(i)$.

Contoh 2.4.5

Pandang digraph G_d gambar 2.4.1

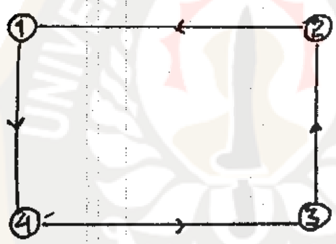
$$d^-(1) = d^-(2) = 1 \; ; \; d^-(4) = d^-(3) = d^-(5) = 2$$

$$d^+(1) = 1 \; ; \; d^+(2) = d^+(4) = d^+(3) = 2 \; ; \; d^-(5) = 1$$

Definisi 2.4.6

Regular Digraph adalah suatu digraph G_d dengan derajat keluar sama dengan derajat masuk untuk semua i dalam G_d

Contoh : 2.4.6



Gb 2.4.2 Regular digraph G_d

Definisi : 2.4.7

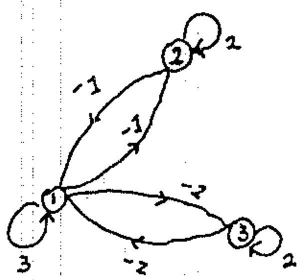
MATRIKS BOBOT dari suatu digraph G_d dengan n node dan tidak memiliki edge paralel adalah matriks A = $[a_{ij}]$ A bersesuaian dengan node i dengan i = 1, 2, ... , n; dalam G_d, dan elemen-elemnen matriks A adalah :

a_{ij} = w_{ij}, jika terdapat edge berarah dari node i ke node j dengan bobot w_{ij}; (i,j= 1,2...,n)

= 0 jika tidak ada edge berarah dari node i ke node j(i,j=1,2,...,n)

Contoh : 2.4.7

Diberikan digraph G_d(V.E) dengan 3 node, yang masing-masing edgenya memiliki bobot.



Gb. 2.4.3 Digraph G_d (V,E)

Matriks bobot dari digraph $G_d(V.E)$ tersebut adalah

$$A = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi : 2.4.8

Suatu graph berarah $G_1(V_1,E_1)$ disebut sebagai subgraph dari graph $G_d(V,E)$ jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$

Definisi : 2.4.9

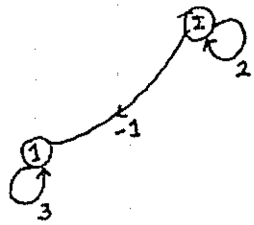
Dua subgraph $G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ dari suatu graph $G_d(V,E)$ disebut Edge-Disjoint jika $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ dan disebut node-disjoint jika $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Contoh : 2.4.8

Pandang digraph G_d pada contoh 2.4.7.

$G_1(V_1,E_1)$ dengan

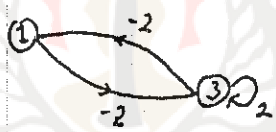
$V_1 = \{ 1,2 \}$; $E_1 = \{(2,2),(2,1),(1,1)\}$



Gb.2.4.4a $G_1(V_1,E_1)$

$G_2(V_2,E_2)$ dengan

$V_2 = \{1,3\}$; $E_2 = \{(3,1),(1,3),(3,3)\}$



Gb.2.4.4b $G_2(V_2,E_2)$

$G_3(V_3,E_3)$ dengan $V_3 = \{3\}$; $E_3 = \{(3,3)\}$

Gb.2.4.4c $G_3(V_3,E_3)$

$G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ disebut edge-disjoint karena $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dan

$G_1(V_1,E_1)$ dan $G_3(V_3,E_3)$ disebut node-disjoint karena $V_1 \cap V_3 = \emptyset$

Definisi 2.4.10

Suatu subgraph G_1 $(V_1.E_1)$ dari suatu graph Gd (V.E) disebut sebagai spanning subgraph jika $V_1 = V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Contoh 2.4.9

Pandang digraph $G_d(V.E)$ pada contoh 2.4.8.

$G_1(V_1,E_1)$ dengan $V_1 = \{1,2,3\}$; $E_1 = \{(2,2), (1,1), (3,3)\}$.

Gb.2.4.5.G_1 (V_1,E_1) Spanning Subgraph

Karena $V_1 = V$ maka $G_1(V_1,E_1)$ adalah spanning sub graph.

Definisi : 2.4.11

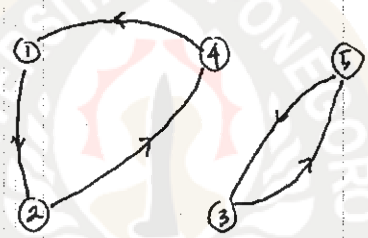
Suatu digraph G_d dikatakan terhubung (connected) jika antara 2 titik sembarang terdapat path yang menghubungkannya. Jika tidak demikian disebut tidak terhubung (disconnected).

Definisi : 2.4.12

Komponen adalah subgraph terhubung maksimal

Contoh : 2.4.10

Diberikan suatu graph berarah G_d (V,E) dengan V = {(1,2,3,4,5) ; E = {(1,2),(2,4),(3,5),(4,1), (5,3)}.



Gb. 2.4.6. G_d(V,E)

Karena tidak ada path yang menghubungkan node
4 dan 5 atau 4 dan 3 atau
2 dan 5 atau 2 dan 3 atau
1 dan 5 atau 1 dan 3

G_d (V,E) di atas adalah disconnected. Sedangkan digraph pada contoh 2.4.1 adalah digraph yang connected.

Digraph pada contoh 2.4.6 mempunyai 2 komponen yaitu :

1. dengan v = {1,2,4} dan E = {(1,2),(2,4),(4,1)}
2. dengan v = {3,5} dan E = {(3,5),(5,3)}

Definisi : 2.4.13

Suatu digraph $G_d(V,E)$ disebut simetris jika untuk setiap $(x,y) \in E$ memenuhi : $(x,y) \in E \Rightarrow (y,x) \in E$.

Contoh : 2.4.11

Pandang digraph $G_d(V,E)$ pada gambar 2.4.3. Digraph tersebut simetris, karena :

$(1,2) \in E \longrightarrow (2,1) \in E$ dan

$(1,3) \in E \longrightarrow (3,1) \in E$.

2.5. COATES GRAPH

Definisi : 2.5.1

Diberikan suatu matriks bujursangkar $A = [a_{ij}]$ dengan ordo (nxn), Coates Graph yang bersesuaian dengan matriks A dinotasikan $G_c(A)$ atau G_c. Coates Graph yaitu digraph dengan n-node yang setiap edge berarahnya memiliki bobot dan node-node dinyatakan dalam bilangan bulat: 1,2,...,n. Jika $a_{ij} \neq 0$, maka ada edge berarah dari node-i ke node-j dengan bobot a_{ij} ; (i,j = 1,2,...,n).

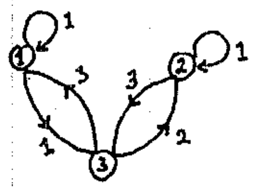
Apabila diketahui matriks koefisiennya, maka dapat digambar Coates Graphnya dengan terlebih dahulu mentranspose matriks koefisien tersebut.

Contoh : 2.5.1

Diberikan matriks koefisien $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

maka : $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $G_c(A)$:



Gb. 2.5.1. $G_c(A)$

Demikian juga apabila diketahui Coates Graphnya maka dapat dicari matriks koefisiennya dengan cara mentranspose matriks bobot Coates Graph tersebut.

Pandang persamaan linier nonhomogen AX = B ordo n. A adalah matriks koefisien, X dan B masing-masing adalah vektor kolom dari variabel-variabel dan konstanta-konstanta persamaan linier nonhomogen tersebut.

Definisi : 2.5.2

Matriks A_u adalah matriks yagn diperoleh dari Matriks A dengan menambah kolom -B pada kolom ke-(n+1) dan menambah baris nol pada baris ke-(n+1) pada matriks A. Coates Graph yang bersesuaian dengan matriks koefisien A_u dinotasikan dengan $G_c(A_u)$.

Contoh : 2.5.2

Diberikan sistem persamaan linier nonhomogen ordo 3 :

$x_1 + 3x_3 = 1$

$x_2 + 2x_3 = 0$

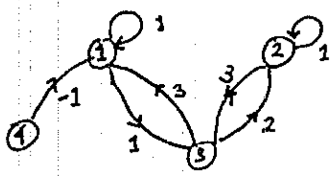
$x_1 + 3x_2 = 0$

Jadi ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \quad . \quad X = B$$

Sehingga $G_c(A_u)$:



Gb. 2.5.2 G_c (A_u)

Definisi : 2.5.3

$f(G_s)$ adalah hasil kali seluruh bobot yang dimiliki oleh edge berarah (i,j) dengan i sebagai initial node dan j sebagai terminal node dalam suatu subgraph $G_s(V_s,E_s)$ pada digraph $G_d(V,E)$; $i,j = 1,2,\ldots,n$,

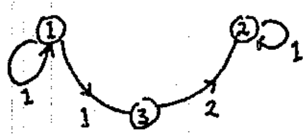
atau: $f(G_s) = \prod_{i,j \in V_s} f(i,j)$

dimana : $f(i,j)$ = bobot pada edge (i,j)

$i,j = 1,2,3,\ldots,n$

Contoh : 2.5.3

Pandang subgraph $G_s(V_s,E_s)$ dari $G_d(V,E)$ gambar 2.5.1 dengan $V_s = \{1,2,3\}$; $E_s = \{(1,1),(1,3),(3,2),(2,2)\}$



Gb. 2.5.3. G_s (V_s,E_s)

Maka $f(G_s) = \prod_{i,j \in V_s} f(i,j)$

$= f(1,1) \cdot f(1,3) \cdot f(3,2) \cdot f(2,2)$

$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

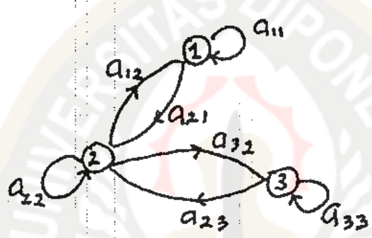
2.6. PERHITUNGAN SECARA TOPOLOGIS DARI DETERMINAN

Definisi : 2.6.1

1-faktor dari suatu digraph G_d yang dinotasikan dengan h adalah spanning subgraph dari G_d yang merupakan regular digraph (digraph teratur) dengan derajad 1.

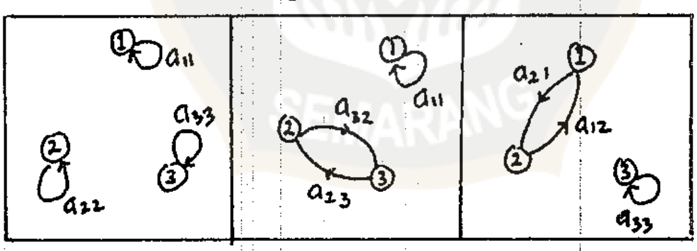
Contoh : 2.6.1

Diberikan suatu Coates Graph sebagai berikut :



Gb. 2.6.1.a $G_c(A)$

1-faktor (h) dalam $G_c(A)$ adalah



Gb. 2.6.1.b 1-faktor (h)

Lemma : 2.6.1

Perkalian elemen-elemen matriks A = $[a_{ij}]$ yang tidak sama dengan nol dan sesuai dengan permutasi $j_1, j_2, \ldots, j_n$ berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h) dalam $G_c(A)$ yang bersesuaian dengan matriks A; atau

$$a_{1j1} \cdot a_{2j2} \cdot \ldots \cdot a_{njn} = f(h)$$

dengan : $a_{1j1} \cdot a_{2j2} \cdot \ldots \cdot a_{njn} \neq 0$

$j_1, j_2, \ldots, j_n$ suatu permutasi

Bukti :

Diberikan perkalian $a_{1j1} \cdot a_{2j2} \cdot \ldots \cdot a_{njn} \neq 0$ ($j_1, j_2, \ldots, j_n$ suatu permutasi) yang merupakan perkalian bobot-bobot dari edge-edge berarah $(j_1,1)$, $(j_2,2)$, ... , (j_n,n).

Pada perkalian ini masing-masing k, muncul 2 kali pada barisan, satu kali pada elemen-1 dan satu kali pada elemen ke-2, pada beberapa pasangan berurutan. Hal ini menunjukkan bahwa indegree dan outdegree pada masing-masing node adalah 1. Graph berarah dari barisan edge berarah tersebut adalah spanning subgraph, dari $G_c(A)$. Jadi menurut definisi 2.4.6 barisan edge berarah tersebut merupakan regular digraph derajad satu dan menurut definisi 2.6.1 merupakan 1-faktor (h) dari $G_c(A)$. Jadi :

$$a_{1j1} \cdot a_{2j2} \cdot \ldots \cdot a_{njn} = f(h)$$

$$a_{1j1} \cdot a_{2j2} \cdot \ldots \cdot a_{njn} \neq 0$$

Terbukti

Contoh : 2.6.2

Pandang Coates Graph $G_c(A)$ pada contoh 2.6.1 gambar 2.6.1.a. Matriks A yang bersesuaian dengan $G_c(A)$ adalah :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari gambar 2.6.1. didapatkan :

Perkalian elemen-elemen Matriks yang $\neq 0$	f(h)
$a_{11} . a_{22} . a_{33} \neq 0$	$a_{11} . a_{22} . a_{33}$
$a_{11} . a_{32} . a_{23} \neq 0$	$a_{11} . a_{32} . a_{23}$
$a_{12} . a_{21} . a_{33} \neq 0$	$a_{12} . a_{21} . a_{33}$

Terlihat adanya korespondensi satu-satu antara perkalian elemen-elemen matriks A yang tidak sama dengan nol dengan 1-faktor (h) dari $G_c(A)$.

Tiap-tiap 1-faktor (h) terdiri dari beberapa komponen, yang berupa sirkuit-sirkuit berarah. Komponen dari digraph G_d dikatakan komponen genap apabila komponen tersebut memuat edge berjumlah genap. Demikian juga dikatakan komponen ganjil apabila komponen tersebut memuat edge berjumlah ganjil.

Lemma : 2.6.2

a_{1j1}, a_{2j2}, ... , a_{njn} adalah permutasi dari elemen-elemen matriks koefisien $A = [a_{ij}]$, tanda dari permutasi :

$$\sigma\,(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (-1)^{n-L_h}$$

dimana : n = banyak node dalam 1-faktor (h)

L_h = banyak sirkuit berarah dalam 1-faktor (h) dari $G_c(A)$ yang sesuai dengan matriks koefisien A.

Bukti :

$$\sigma\,(j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ bernilai } \begin{cases} -1 & \text{jika permutasi ganjil} \\ 1 & \text{jika permutasi genap} \end{cases}$$

Ambil $(i_1, i_2) \cup (i_2, i_3) \cup \ldots \cup (i_v, i_1)$ adalah suatu sirkuit berarah dengan panjang w dalam h. Ambil barisan (2xW) dengan :

- baris I terdiri dari node-node $i_1, i_2, \ldots, i_v$
- baris II terdiri dari node-node $i_2, i_3, \ldots, i_1$

Akan ada (w-1) pertukaran untuk membuat baris kedua menjadi baris pertama. Dengan demikian jika h mempunyai L_h sirkuit berarah yang memuat w_1, w_2, ..., w_{L_h} edge maka ada $(w_1-1) + (w_2-1) + \ldots + (w_{L_h}-1)$ pertukaran untuk membuat baris menjadi kolom dalam perhitungan f(h). Sehingga tanda permutasi :

$(-1)^{v_1+v_2+\ldots+v_{Lh}-Lh} = (-1)^{n-L_h}$.Lemma terbukti.

Contoh : 2.6.3

Pandang permutasi elemen dari matriks koefisien A pada contoh 2.5.1. $a_{11}.a_{23}.a_{32}$ adalah 1-faktor (h) dari graph pada gambar 2.5.1 tersebut yang mempunyai 1 komponen genap. $\sigma(1,3,2)$: permutasi ganjil sehingga $\sigma(1,3,2) = -1$. Pada h, n = 3, L = 2, sehingga n - L = 3 - 2 = 1

$\sigma(1,3,2) = (-1)^1 = -1$

Teorema : 2.6.1

Misalkan $G_c(A)$ Coates Graph yang bersesuaian dengan matriks koefisien A berordo n, maka :

$$|A| = \sum_h (-1)^{n-L_h} f(h)$$

dimana :

h = 1-faktor pada $G_c(A)$

f(h) = hasil kali bobot-bobot edge pada h

L_h = jumlah sirkuit berarah pada h

n = banyaknya node pada $G_c(A)$

Bukti :

Pada definisi 2.1.5 dinyatakan bahwa :

$$|A| = \sum \sigma(j_1,j_2,\ldots,j_n)\ a_1j_1.a_2j_2.\ldots.a_nj_n$$

Menurut lemma 2.6.1 berarti :

$$|A| = \sum_h \sigma(j_1,j_2,\ldots,j_n)\ f(h)$$

dan menurut lemma 2.6.2 diperoleh :

$$|A| = \sum_h (-1)^{n-L_h} \cdot f(h) \text{ .Terbukti.}$$

Contoh :2.6.4

Pandang Coates Graph $G_c(A)$ pada contoh 2.6.1 gambar 2.6.1 dimana : $a_{11}= z_1+z_3$; $a_{22}= z_2+z_3+z_4$;

$a_{33}= z_4+z_5+z_6$; $a_{32}= -z_4$; $a_{23}= -z_4$;

$a_{21}= -z_2-z_3$; $a_{12}= -z_3$

$G_c(A)$ tersebut mempunyai 1-faktor (h) sebanyak 3 buah

Maka $|A|= \sum_h (-1)^{n-L_h} f(h)$

$$= (-1)^{(3-3)}(z_1+z_3)(z_2+z_3+z_4)(z_4+z_5+z_6)$$

$$+(-1)^{(3-2)}(z_1+z_3)(-z_4)(-z_4)$$

$$+(-1)^{(3-2)}(-z_2-z_3)(-z_3)(z_4+z_5+z_6)$$

$$=(z_1+z_3)(z_2+z_3)(z_4+z_5+z_6)+(z_1+z_3)z_4(z_4+z_5+z_6)$$

$$-z_4^2 (z_2+z_3)-z_3(z_2+z_3)(z_4+z_5+z_6)$$

$$= z_1(z_2+z_3)(z_4+z_5+z_6) + (z_1+z_3)(z_5+z_6)$$

2.7. PERHITUNGAN SECARA TOPOLOGIS DARI KOFAKTOR

Pandang persamaan linier nonhomogen ordo n AX = B.

Definisi : 2.7.1

Matriks A_α adalah matriks yang diperoleh dari matriks koefisien A dengan mengganti kolom ke-j dengan kolom nol kecuali elemen baris ke-i kolom ke-j diganti dengan elemen 1, (i,j = 1,2,...,n; i≠j)

Definisi : 2.7.2

Hubungan 1-faktor dari node-i ke node-j dalam suatu digraph G_d, dinotasikan H_{ij}. Hubungan 1-faktor adalah suatu spanning subgraph yang memuat :

i. path berarah dari node-i ke node-j.

ii. sirkuit-sirkuit berarah yang nodenya saling asing dan node-node tersebut tidak dalam path (i).

Teorema : 2.7.1

$G_c(A)$ adalah Coates graph yang bersesuaian dengan matriks koefisien A = $[a_{ij}]$ ordo n. Maka :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} . f\ (H_{ij})\ ;$$

untuk $i \neq j$; i,j = 1,2,...,n

dimana :

Δ_{ij} = kofaktor dari elemen (i,j) dari matriks A

H_{ij} = hubungan 1 faktor dari node-i ke node-j pada $G_c(A)$

L_h = jumlah sirkuit berarah pada H_{ij}

n = jumlah node pada $G_c(A)$

Bukti : Δ_{ij} adalah determinan dari matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengganti kolom ke-j dengan kolom nol kecuali elemen baris ke-i kolom ke-j diganti elemen 1. Menurut definisi 2.7.1 berarti Δ_{ij} adalah determinan dari matriks A_α.

Coates graph diperoleh dari $G_c(A)$ dengan menghapus semua edge yang mempunyai node-j sebagai initial node dan kemudian menambahkan edge berarah dari node-j ke node-i dengan bobot 1.

Sehingga dengan ekspansi kolom ke-j diperoleh :

$$\det A_\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta_{ij} = 1\,.\,\Delta_{ij}$$

$$\det A_\alpha = \Delta_{ij} = (-1)^n \sum_{h_\alpha} (-1)^{L_\alpha} f(h_\alpha)$$

dimana :

L_α = jumlah sirkuit berarah dalam h_α

h_α = 1-faktor dalam $G_c(A_\alpha)$

Masing-masing faktor h_α dalam $G_c(A_\alpha)$ memuat edge tambahan dengan bobot 1, jika edge tambahan dengan bobot-1 pada h_α dihapus maka diperoleh H_{ij} pada $G_c(A)$, demikian juga jika pada h_{ij} dari $G_c(A)$, diberi edge tambahan dari node-j ke node ke-i dengan bobot 1 maka diperoleh h_α pada $G_c(A_\alpha)$. Berarti ada korespondensi satu-satu antara h_α pada $G_c(A_\alpha)$ dan H_{ij} pada $G_c(A)$. Karena bobot edge berarah dari node-j ke node-i adalah 1, maka

$f(h_\alpha) = f(H_{ij})$; untuk h_α dan H_{ij} yang bersesuaian

Jumlah sirkuit berarah pada H_{ij} 1 lebih sedikit dari Jumlah sirkuit berarah pada H_{ij} , maka $L_H = L_\alpha - 1$

Dengan demikian diperoleh :

$$\Delta_{ij} = (-1)^n \sum_{h_\alpha} (-1)^{L_\alpha} . \; f(h_\alpha)$$

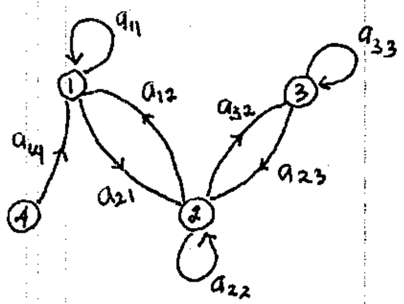
$$= (-1)^n \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H + 1} . \; f(H_{ij})$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} . \; f(H_{ij})$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} . \; f(H_{ij}). \text{ Terbukti}$$

Contoh 2.7.1.

Diberikan suatu contoh Coates graph sebagai berikut. Tentukan kofaktor elemen baris ke-4 kolom ke-1.



Gb. 2.7.1. $G_c(A)$

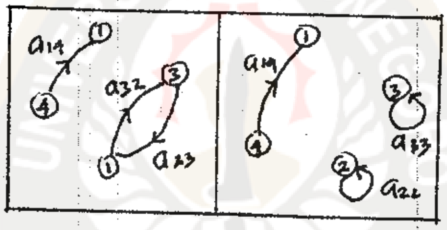
Dengan : $a_{11} = z_1 + z_3$; $a_{12} = -z_3$; $a_{21} = -z_2 - z_3$; $a_{23} = -z_4$

$a_{22} = z_2 + z_3 + z_4$; $a_{32} = -z_4$; $a_{33} = z_4 + z_5 + z_6$; $a_{14} = -v_1$

Jawab :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hubungan 1-faktor (H_{41}) :



Gb. 2.7.2. H_{41}

$$\Delta_{41} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{41}} (-1)^{L_H} \cdot f(H_{41})$$

$$= (-1)^3 \left[(-1)^1(-v_1)(-z_4)(-z_4) + (-1)^2(-V_1)(z_2+z_3+z_4)(z_4+z_5+z_6)\right)$$

$$= -v_1[z_4^{\,2} - (z_2+z_3+z_4)(z_4+z_5+z_6)]$$

$$= -v_1[-(z_2+z_3+)(z_4+z_5+z_6) - z_4(z_5+z_6)]$$

$$= v_1[(z_2+z_3)(z_4+z_5+z_6) + z_4(z_5+z_6)]$$

2.8. PENYELESAIAN PERSAMAAN LINIER NON - HOMOGEN

Pandang persamaan linier non-homogen $AX = B$ dimana $A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien ordo n dan X dan B masing-masing vektor kolom. Transpose dari X adalah

$[\ X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\ ]$ dan transpose dari B adalah $[\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\ ]$

Teorema : 2.8.1.

Jika matriks koefisien A non singular, maka solusi persamaan linier non homogen ordo n. AX = B diberikan oleh :

$$X_k = \frac{\sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} \cdot f\,(H_{(n+1)k})}{\sum_{h} (-1)^{L_h} \cdot f\,(h)}$$

dimana :

X_k = Solusi persamaan linier non homogen AX = B

$H_{(n+1)k}$ = hubungan 1-faktorial dari node (n+1) ke node k pada $G_c(A_u)$

h = 1-faktor (h) pada $G_c(A)$

L_H = jumlah sirkuit berarah pada $H_{(n+1)k}$

L_h = jumlah sirkuit berarah pada h

n = banyaknya node pada $G_c(A)$

Bukti

Karena matriks koefisien A non singular, solusi persamaan linier non homogen ordo n oleh aturan Cramer adalah :

$$X_k = \frac{D_k}{|A|}, \quad \text{dimana } |A| \neq 0$$
$$k = 1, 2, \ldots n$$

D_k adalah determinan matriks A dengan mengganti kolom ke-j dengan vektor kolom B.

Menurut definisi 2.5.2 D_k merupakan determinan matriks A_u dengan menghapus baris ke-(n+1) dan kolom ke-k. Atau D_k merupakan kofaktor $a_{(n+1)k}$ dari matriks A_u.

Sesuai definisi 2.2.2.

$$D_k = \Delta_{(n+1)k} = (-1)^{(n+1)-1} \sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} . f\ (H_{(n+1)k})$$

$$= (-1)^n \sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} . f\ (H_{(n+1)k}) \ ....(1)$$

Menurut teorema 2.6.1 :

$$|A| = \sum_h (-1)^{n-L_h} . f\ (h)$$

$$= (-1)^n \sum_h (-1)^{-L_h} . f\ (h)$$

$$= (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} . f\ (h) \ ....(2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$x_k = \frac{(-1)^n \sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} . f\ (H_{(n+1)k})}{(-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} . f\ (h)}$$

Terbukti

Contoh : 2.8.1.

Diberikan persamaan linier non-homogen AX = B ordo 3 dari suatu rangkaian listrik. Variabel-variabel sebagai fungsi dari Voltase, koefisien variabel merupakan konduktansi-konduktansi, dan konstanta merupakan besarnya arus.

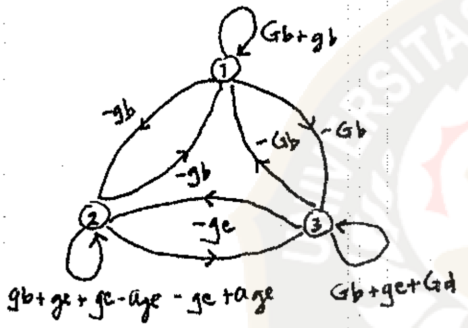
$$\begin{bmatrix} Gb+gb & -gb & -Gb \\ -gb & gb+ge+gc+age & -gc \\ -Gb & -gc+age & Gb+gc+Gd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

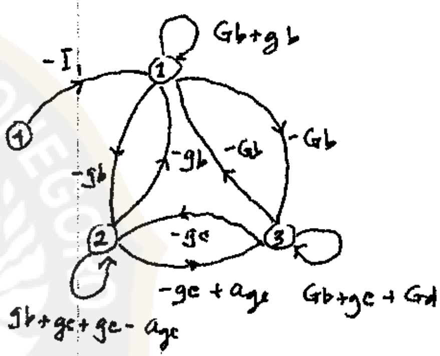
Bagaimanakah perbandingan antara $Gd.V_3$ dengan I_1

Jawab :

Coates Graph $G_c(A)$:



Gb. 4.4.1 $G_c(A)$



Gb. 4.4.2. $G_c(A_u)$

Akan kita cari perbandinangan antara $Gd.V_3$ dengan I_1.

Menurut teorema 2.4.1

$$\frac{Gd.V_3}{I_1} = \frac{Gd \sum_{H_{43}} (-1)^{L_H} f(H_{43})}{I_1 \sum_{h} (-1)^{L_H} f(h)}$$

$$\frac{Gd[(1)^1(-I\ )(-Gb)(gb+ge+gc-age)+(-1)^0(-I_1)(-gb)(-gc+age)]_1}{I_1 \quad [(-1)^3(Gb+gb)(gb+ge+gc-age)(gb+gc+Gd) + (-1)^2(-gc)(-gc+age)(Gb+gb)+(-1)^2(gb+ge+gc-age)(-Gb)^2 + (-1)^2(-gb)^2(Gb+gb+Gd)+(-1)^1(-gb)(-Gb)(-gc) + (-1)^1(-gb)\ (-Gb)(-gc+age)]}$$

$$= \frac{Gd\ [Gb(gb+ge+gc-age)+ gb(gc-age)]}{[(Gb+gb)(gb+ge)(gb+gc+Gd) +(gb+gb)(gc-age)(Gb+Gd) -Gb^2(gb+ge+gc-age)-gb^2(gb+gc+Gd)-gbGbgc-gbGb(gc-age)]}$$

$$= \frac{Gd\ [Gb(gb+ge+gc-age) +gb(gc-age)]}{Gbgb(gb+gc+Gd) +ge(Gb+gb)(Gb+gc+Gd)+(Gb+gb)Gd(gc-age) -Gb^2(gb+ge)-gbgcGb}$$

$$= \frac{Gd\ [Gb(Gb+ge+gc-age) +gb(gc-age)]}{Gbgb(gc+Gd)+geGb(gc+Gd)+gegb(Gb+gc+Gd)+gbGb(gc-age)-gcgbGb}.$$

Terlihat pada perhitungan penyebut terdapat beberapa penghapusan langkah perhitungan.

2.9. METODE ANALISA RANGKAIAN

Sebelum menerapkan Modifikasi Coates Graph pada perhitungan jaringan/rangkaian listrik perlu sekali kita memahami hal-hal mendasar yang sangat penting. Kita harus mengenal apa itu jaringan (network), bagaimana bunyi hukum Kirrchoff untuk arus dan hukum kirchoff untuk tegangan, serta bagaimana menganalisa rangkaian listrik tersebut.

Definisi : 2.9.1

Jaringan (network) adalah suatu grup dari interkoneksi komponen yang membentuk rangkaian, yang sebagian dari jaringan sering dinamai edaran (sirkuit) tertutup.

Hukum Kirchoff untuk arus :

Pada suatu titik pada suatu rangkaian listrik, jumlah arus sama dengan nol, atau $\sum I = 0$.

Hukum Kirchoff untuk tegangan :

Jumlah aljabar semua tegangan cabang sekeliling lingkaran tertutup manapun pada sebuah jaringan adalah nol pada setiap saat.

Akan dipelajari cara-cara yang sistematis untuk merumuskan persamaan dari analisa rangkaian. Ada dua cara/metode untuk analisa rangkaian yaitu :

A. Metode Tegangan Simpul

Metode ini mempunyai langkah-langkah sebagai berikut:

1. Dipilih sebuah simpul acuan o; secara sebarang.

   Simpul-simpul yang lain rangkaian itu diberi nama dengan huruf A,B,...,N dan tegangan-tegangan yang tidak diketahui $V_A . V_B , \ldots , V_N$,dipilih sebagai tegangan naik dari simpul o ke simpul A,B,...,N.

2. Persamaan-persamaan simpul (hukum Kirchoff untuk arus) dalam bentuk matriks akan berupa :

$$\begin{array}{ll} A : & G_{AA}V_A - G_{AB}V_B - \ldots - G_{AN}V_N = I_A \\ B : & -G_{BA}V_A + G_{BB}V_B - \ldots - G_{BN}V_N = I_B \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ N : & -G_{NA}V_A - G_{NB}V_B - \ldots + G_{NN}V_N = I_N \end{array}$$

   dimana :

   G_{xx}= jumlah semua kondukstansi yang terhubung ke simpul x ; x = A,B,..., N.

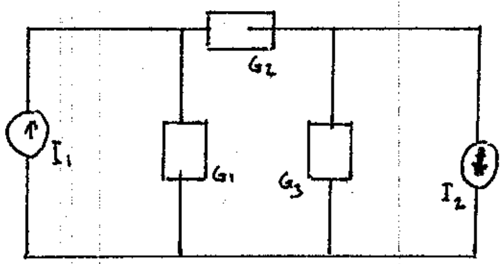
   G_{xy}= jumlah semua kondukstansi yang dihubungkan diantara simpul x dengan simpul y;x,y = A,B,...,N; $x \neq y$.

   I_x = jumlah semua sumber arus yang mencatu simpul x; x = A,B,...,N.

   Jika R = hambatan maka $\frac{1}{R}$ disebut kondukstansi dilambangkan G.

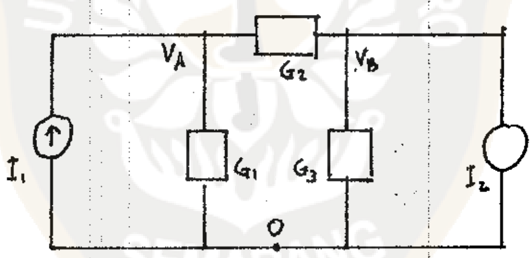
Contoh 2.9.1

Diberikan rangkaian listrik sebagai berikut :



Gb. 2.9.1 Suatu Rangkaian

Maka untuk menganalisanya, sesuai dengan langkah yang pertama rangkaian menjadi :



Gb. 2.9.2 Rangkaian untuk metode tegangan simpul

Sesuai dengam langkah kedua akan diperoleh persamaan linier dalam V_A dan V_B.

$$(G_1 + G_2)\,V_A - G_2 V_B = I_1$$

$$-G_2 V_A + (G_2 + G_3)\,V_B = -I_2$$

Sehingga jika dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

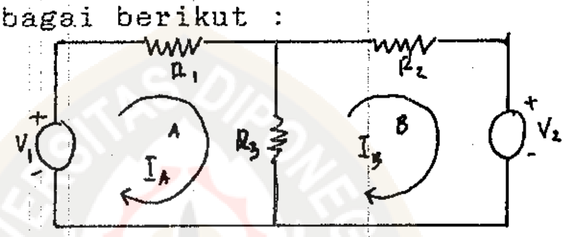
B. Metode Arus Matajala

Definisi : 2.9.2

Matajala adalah suatu rangkaian tertutup yang tidak mengandung unsur rangkaian di tengahnya.

Contoh : 2.9.2

Diberikan suatu rangkaian untuk metode arus matajala sebagai berikut :



Gb. 2.9.3

Rangkaian pada gb. 2.9.3 merupakan suatu rangkaian yang mempunyai dua matajala. Matajala A mengandung R_1, R_3 dan V_1 dengan I_A sebagai arus matajala. Matajala B mengandung R_2, R_3 dan V_2 dengan I_B sebagai arus matajala. Langkah-langkah formal metode arus matajala adalah sebagai berikut :

1. Dipilih arus matajala menurut arah jarum jam. Pemilihan arus itu mengakibatkan arus unsur berupa arus matajala atau selisih aljabar dua arus matajala.
2. Persamaan-persamaan matajala (hukum Kirchoff untuk tegangan) ditulis menurut aturan untuk matajala-matajala A,B,...,N.

$$A : R_{AA}\, I_A - R_{AB} I_B \; - \ldots - R_{AN} I_N \; = V_A$$

$$B : -R_{BA} I_A \; + \; R_{BB} I_B - \ldots - R_{BN} I_N = V_B$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$N : -R_{NA} I_A - R_{NB} I_B \; - \ldots + R_{NN} I_N \; = V_N$$

dimana :

R_{xx} = Jumlah semua resistansi yang membentuk matajala x

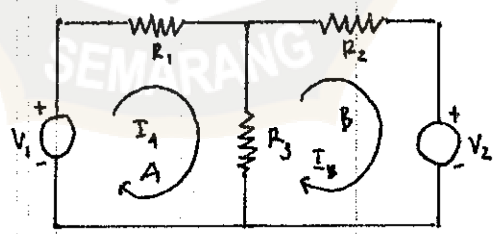
$x = A, B, \ldots, N$

R_{XY} = jumlah semua resistansi yang dimiliki bersama oleh matajala x dan y ; $x, y = A, B, \ldots N$ dengan $x \neq y$

V_x = jumlah semua sumber tegangan naik dalam matajala x dalam arah jarum jam ; $x = A, B, \ldots, N$

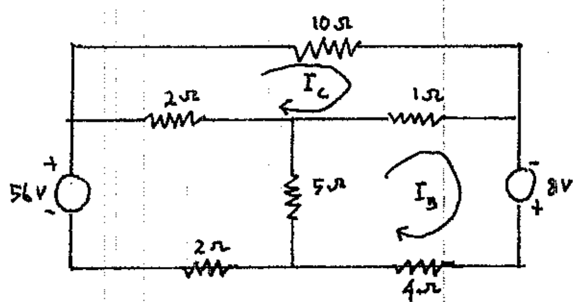
Contoh 2.9.3

Diberikan rangkaian untuk metode arus matajala sebagai berikut :



Gb. 2.9.4 Rangkaian

Sesuai dengan langkah 1, rangkaian menjadi :



Gb. 2.9.5 Rangkaian untuk metode arus matajala

Sesuai dengan lankah 2, diperoleh persamaan linier dalam I_A, I_B, I_C sebagai berikut :

$$(2+2+5)\ I_A - 5\ I_B - 2\ I_C = 56$$

$$9\ I_A - 5\ I_B - 2\ I_C = 56 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-5\ I_A + (5+1+4) I_B - I_C = 8$$

$$-5\ I_A + 10\ I_B - I_C = 8 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$-2\ I_A - I_B + (10+2+1) I_C = 0$$

$$-2\ I_A - I_B + 13\ I_C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$